Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

Lineare Algebra II
Blatt 6
Abgabe: 14.06.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Gegeben $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1 und V_2, ist die *äußere direkte Summe* $V_1 \oplus V_2$ der Vektorraum bestehend aus allen Paaren (v_1, v_2) von Elementen v_i aus V_i mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, d.h. $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ und $\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$.

(a) Beschreibe alle endlichdimensionalen Vektorräume V für welche $V \oplus V$ isomorph zu V ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[T] & \to & \mathbb{K}[T] \oplus \mathbb{K}[T] \\ \sum\limits_{i=0}^{D} a_i T^i & \mapsto & \left(\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{D} a_j T^{j/2}, \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{D} a_k T^{(k-1)/2} \right) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.

(c) Sei V die direkte Summe der Unterräume U und W. Gib einen expliziten Isomorphismus zwischen dem Dualraum V^* und der äußeren direkten Summe $U^* \oplus W^*$ an.

(d) Schließe daraus, dass die Funktionale $F_1, \ldots, F_n$ aus V^* linear unabhängig sind, wenn ihre Einschränkungen $(F_1)_{\restriction U}, \ldots, (F_n)_{\restriction U}$ liner unabhängig in U^* sind. Gilt die Rückrichtung?

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**

Gegeben eine beliebige Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ von $\mathbb{R}^5$ sei U der Unterraum, welcher von der Menge $\{v_1, v_1 + 2v_2, v_1 + 2v_2 + 3v_3, v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4\}$ erzeugt wird. Gibt es Funktionale F aus $(\mathbb{R}^5)^*$, welche auf U verschwinden und $F(v_5) = 1$? Wenn ja, wie viele?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[T]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R} \\ (P(T), Q(T)) & \mapsto & \int_0^1 P(T) \cdot Q(T) dT \end{array}$$

, wobei $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 ist.

(a) Zeige, dass φ bilinear und symmetrisch ist. Bildet das Tripel $(\mathbb{R}[T]_{\leq 2}, \mathbb{R}[T]_{\leq 2}, \varphi)$ ein duales Paar?
Hinweis: Polynome sind stetige Abbildungen.

(b) Zeige, dass die Vektoren $u_1 = 2T - 1$ und $u_2 = 6T^2 - 6T + 1$ orthogonal sind.

(c) Beschreibe das orthogonale Komplement von $\mathrm{Lin}(\{u_1, u_2\})$ in $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$.
Hinweis: Es enthält ein Polynom vom Grad höchstens 1.

(d) Bestimme mit Hilfe der obigen Teilfragen den adjungierten Endomorphismus F^t zu der Abbildung F aus der Aufgabe 1 im Blatt 0. Berechne den Wert

$$\int_0^1 PF(Q) - F^t(P)Q \, dT$$

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.